Clasa a XII-a

Soluţii

Problema 1

a) $\text{rang}(A) = n$ implică A inversabilă; $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(B) = r$ şi $\text{rang}(AB) \geq \text{rang}(A^{-1}AB) = \text{rang}(B) = r$, deci $\text{rang}(AB) = r$.

b) Fixăm $A \in S_n$ şi considerăm $f : S_r \to S_r$, $f(X) = AX$. A inversabilă implică f injectivă (S_r este finită), implică f bijectivă.

Atunci $S = \sum_{X \in S_r} X = \sum_{X \in S_r} AX = AS$ deci $(A - I)S = 0$ (*).

Mai dovedim că există $A_n \in S_n$ astfel ca $A_n - I \in S_n$ (deci $S = 0$). Construim A_n pentru $n = 2$ şi $n = 3$: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; de aici

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_{2n+1} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Punctaj recomandat: a) 3 puncte; b) ecuaţia (*) 2 puncte; finalizare 2 puncte.

Problema 2

f verifică proprietatea din enunţ implică $f - c$ verifică aceeaşi proprietate pentru $c \in \mathbf{R}$. Considerăm

$$h(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Relaţia devine

$$\int_0^1 h(x)g(x)\mathrm{d}x = 0, \ \forall g \text{ ca în enunţ}. \qquad (*)$$

Dacă există $x_0 \in (0,1)$, $h(x_0) \neq 0$, luăm $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (0,1)$ pe care h are semn constant, funcţia $g(x) = (x - x_0)^2 - \varepsilon^2$ pentru $x \in V$ şi $g(x) = 0$ altfel, dă contradicţia.

Punctaj recomandat: reducerea la (*) 2 puncte; reducerea la o vecinătate a lui x_0, 3 puncte; finalizare 2 puncte.

Problema 3

a) $(k,p) = 1$ implică existenţa $a, b \in \mathbf{Z}$ cu $ka + pb = 1$ deci $(k1_A)(a1_A) = 1_A$.

b) $x = y = 1_A$ implică $1_A = b \in B$.

c) Dacă A necomutativ, există $x, y \in A$, $b \in B \setminus \{1_A\}$ cu $xy = byx$. De aici rezultă $x + k1_A$ şi y nu comută pentru orice $k = 0, 1 \dots, p-1$ şi cum $B \setminus \{1_A\}$ are $p - 1$ elemente, există $s < r$ în $\{1, 2 \dots, p-1\}$ şi $a \in B \setminus \{1_A\}$ astfel încât $(x + r1_A)y = ay(x + r1_A)$ şi $(x + s1_A)y = ay(x + s1_A)$. Notând $z = x + s1_A$ şi $t = r - s \in \{1, 2 \dots, p-1\}$ avem

$zy = ayz$ şi $(z + t1_A)y = ay(z + t1_A)$. deci $y = ay$ adică $zy = ayz = yz$. Rezultă $(x + s1_A)y = y(x + s1_A)$ de unde $xy = yx$, fals.

Punctaj recomandat: a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte.

Problema 4

a) Derivând relaţia obţinem

$$f(x) = af(ax) + bf(bx),$$

oricare ar fi $x \in [0,1]$. Notând $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, avem $|f(x)| \leq (a+b)M$, adică $M \leq (a+b)M$, deci $M = 0$.

b) Dacă x_0 este un punct de maxim al lui f,

$$f(x_0) = af(ax_0) + bf(bx_0) \leq (a+b)f(x_0),$$

deci ax_0 este punct de maxim. Iterând, $a^n x_0$ este punct de maxim, deci 0 punct de maxim. Analog x_1 punct de minim al lui f implică ax_1 punct de minim, deci 0 punct de minim, deci $f =$ constant.

Punctaj recomandat: a) 2 puncte; b) considerarea punctului de extrem (maxim sau minim) 2 puncte; finalizare 3 puncte.